

- 1、設 $\Delta XOY = \theta, 0 < \theta < 90^\circ$ 且 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，若 P 為 $\angle XOY$ 內部一點，且 $\overline{OP} = 10$ ，今在射線 $\overline{OX}, \overline{OY}$ 上分別取點 Q, R ，使 ΔPQR 的周長為最小，求此最小周長？
- 2、若拋物線之頂點 $V(-1, 0)$ ，其軸為 x 軸，與圓 $x^2 + y^2 - 3x = 0$ 恰交兩點，求拋物線的方程式？
- 3、設 α, β 為複數，且滿足 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ 且 $\beta \neq 0$ ，令 $P(\alpha), Q(\beta)$ ，試求 ΔOPQ 的三邊長之比
- 4、如圖，半徑為 r 的圓心角為 60° ，試求內接矩形的最大面積？
- 5、設 $m > n$ ，正 m 邊形的一內角為 a° ，正 n 邊形的一內角為 b° ，已知 $a:b = m:n$ ，求數對 (m, n)
- 6、考慮二次函數 $f(x) = 4x^2 + 2(p-2)x - 2p^2 - p + 1$ ，其中 p 為一個常數。若 $f(x)$ 在閉區間 $-1 \leq x \leq 1$ 內，至少有一點 c 滿足 $f(c) > 0$ ，試求 p 的條件。
- 7、設 a, b, c 都是一位的正整數，若方程式 $ax^2 - bx + 3c = 0$ 的兩根為 α, β 滿足 $1 < \alpha < 2, 5 < \beta < 6$
(1)求 a, b, c (2) α, β
- 8、整係數的二次方程式 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的解，計算到小數點後第二位，經四捨五入後得 $5.6, 0.4$ 求正確的解？
- 9、坐標平面上，設直線 $y = ax + b$ 和折線 $2y = 5 + 3|x-1| - 3|x-2|$ 恰交於三個相異點，求所有滿足此條件的數對 (a, b) 所形成圖形的面積？
- 10、直角 ΔABC ，內接於一正 ΔPQR ，如圖，設 $\angle ACP = \theta, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 4, \overline{CP} = x, \overline{RC} = y$
若 $\overline{PR} = a \cos \theta + b \sin \theta$ ，試求(1) y (2) 數對 (a, b)

11、若 $P(x, y)$ 滿足 $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ ，求 $h = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 的範圍？

12、自 $(1,1)$ 作拋物線 $y = x^2 - x + a$ 的兩條切線，若此兩切線互相垂直，求 a 的值及兩切線方程式

13、連結橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， $(a > b > 0)$ 上一點 $C(x_1, y_1)$ 與 $A(-a, 0)$ 的直線與雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 交於 D 點，若 $\overline{AC} = \overline{CD}$ ，求 $x_1 = ?$ (以 a, b 表示)

14、設 a, b, c 互異 (1) $f(x) = \frac{(x-b)(x-c)a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)c^2}{(c-a)(c-b)}$ ，化簡 $f(x)$

$$(2) f(x) = \frac{(x-b)(x-c)a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)c^3}{(c-a)(c-b)}$$

15、 $\triangle ABC$ 中， O 為外心， H 為垂心，若 \overline{AO} 交 \overline{BC} 於 D ， \overline{AH} 交 \overline{BC} 於 E

(1) 若 $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a$ ，證明 $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{b^2(a^2 + c^2 - b^2)}$

(2) 若 $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 7, \overline{BC} = 6$ ，且 $\overrightarrow{AE} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ，求數對 (x, y)

16、從地面上三點 $A < B, C$ 測某山頂之仰角均為 75° ，且 $\angle BAC = 15^\circ, \overline{BC} = 400$ ，求山高？

17、若 $a, b, x, y \geq 0, x + y = 1$ ，證明 $(xa + yb)^n \leq xa^n + yb^n$

18、若 $x, y \in \mathbb{R}, x^2 + xy + y^2 = 1$ 求(1) $x + y$ 的最大值 (2) xy 的最小值

19、若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ \frac{ax+b}{x+1} & x > 1 \end{cases}$ ，求 a, b 使得 $f'(1)$ 存在

20、試證明 153 必不為 7 位數 $34641pq$ 的因數

21、空間相異三點 $A(a,b,c), B(b,c,a), C(c,a,b)$ 都在平面 $E: x+y+z=1$ 上，且 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ， O 為原點

(1)求 $a^2 + b^2 + c^2$ (2)求通過 O, A, B, C 四點的球面方程式

Ans : (1)1 (2) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$

22、設 $A(7,6,3), B(5,-1,2), L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$ 。試在 L 上找一點 P ，使 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，則(1)求

此時 P 的坐標 (2)求此時的 $\overline{PA} + \overline{PB}$

Ans : (1) $P(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ (2) $3\sqrt{10}$

23、若 $ABCDE$ 為單位圓上的正五邊形，求 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE}|$

Ans : 5

24、設 z 為複數，令 $w = i \frac{1-z}{1+z}$ ，若 $|z| > 1$ ，則 w 的虛部必小於 0

25、若 $(2 + \cos 2a)(2 - \cos 2b) = 3$ ，求 $\frac{\cot b}{\cot a}$

Ans : $\pm\sqrt{3}$

26、設正數 a 的常用對數的首數為 x ，尾數為 y ，求滿足 $x(x-6)=16y$ 的 a 值。

Ans : $a = 10^{\frac{-9}{16}}, 1, 10^6, 10^{\frac{119}{16}}$

27、在 $y = \log_3 x$ 的圖形上，取橫坐標分別為 $a, a+2, a+4, a > 1$ 的三個點 A, B, C ，設 ΔABC 的面積為 S (1)試以 a 表示 S (2)證明 $S < 0.54$

Ans : (1) $\log_3 \frac{(a+2)^2}{(a+4)a}$ (2)

28、設 $\log M$ 的首數與尾數恰為方程式 $5x^2 + 13x + k = 0$ 的兩根，則(1)試求實數 k 值 (2)令

$100n < \frac{1}{M} < 100(n+1)$ ，求正整數 n

Ans : (1) $k = -6$ (2) $n = 3$

29、設實係數二次方程式 $x^2 - x + p = 0$ 的兩根的絕對值皆小於 1 則 (1)若二根為實數， p 的範圍為何 (2)若兩根為虛數時， p 的範圍為？

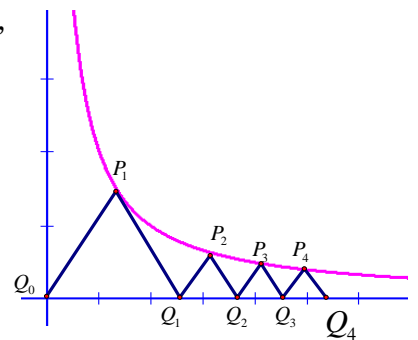
Ans : (1) $0 < p \leq \frac{1}{4}$ (2) $1 > p > \frac{1}{4}$

30、曲線 $\Gamma: y = \frac{1}{x}$ ，若 P_1, P_2, \dots 均為 Γ 上的點，且 $\Delta Q_{k-1} P_k Q_k$ 均為正三角形，

若 $\Delta Q_{k-1} P_k Q_k$ 之邊長為 $2a_k$ ，令 $S_k = \sum_{k=1}^n a_k$ (1)證明 $\{S_n^2\}$ 為等差數列

(2)若 $T_n = a_n a_1 + a_n a_2 + \dots + a_n a_n$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$

Ans : (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$



31、實係數四次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 4 = 0$ 有兩實根 $-2, 1$ ，另兩根為虛根求(1) $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值 (2)此時的 a, b, c

$$\text{Ans : (1) } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{7}{2} \quad (2) a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1$$

32、試解方程組 $\begin{cases} 2^x = y + 3 \\ x + 1 = 2\log_2(y - 1) \end{cases}$ 的解？

$$\text{Ans : } x = 3, y = 5$$

33、 ΔABC 中(1)試將 $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C - 1$ 表示為乘積 (2)如果 $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$ ，證明 A, B, C 恰有一個是 $\frac{2\pi}{3}$

34、已知 $0 < a + b < 90^\circ$, $\cos^2 a + \cos^2 b = \frac{5}{4}$ ，則 $\cos(a + b) + \cos(a - b)$ 的最小值為何？

$$\text{Ans : } 1$$

35、設 ΔABC 的面積為 S ，三邊長為 a, b, c 試證 $32S^3 = a^2b^2c^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

36、 ΔABC 中， $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C > 0$ ，證明 ΔABC 為鈍角三角形

37、設 $y = \sin x + \sqrt{3}|\cos x|$ ，求 y 的最大最小值？

$$\text{Ans : 最大值爲 } 2, \text{ 最小值爲 } -1$$

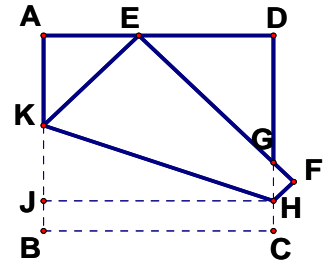
38、 ΔABC 中，若 $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) : (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}) : (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) = 3:1:2$ 且 $\overline{BC} = 1$ ，求 \overline{AC}

$$\text{Ans : } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

39、空間中相異四點，任三點不共線，若 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ ，證明 $\overline{DA} \perp \overline{BC}$

40、一邊長為 a 的正方形，將 \overline{BC} 折起，使 B 落在 \overline{AD} 上，若欲使折起來的面積最小，求此最小面積？

Ans : $\frac{3a^2}{8}$



41、 ΔABC 的三內角 A, B, C 成等差數列， a, b, c 為其三邊長，證明 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

42、若 w 為 1 的立方虛根， z_1, z_2, z_3 為相異三複數，其對應點分別為 A, B, C ，若 $z_1 + z_2 w + z_3 w^2 = 0$ 則證明 ΔABC 為正三角形。

43、設 $A(4, 6), B(-14, 3), C(7, -3)$ ，點 $P(x, y) \rightarrow$ ，若 PA 集 $S = \{P \mid a \overrightarrow{PA} + b \overrightarrow{PB} + c \overrightarrow{PC} = \vec{0}, a, b \geq 0$ 且 $a + b = 1, 0 \leq c \leq 2\}$ 則(1)繪出 S 的圖形 (2)試求 S 的面積

Ans : (2)76

44、設 $A(-1, -12), B(3, -1), C(2, 2)$ 且 $\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ，其中 $x, y \geq 0, 2 \leq 2x + y \leq 4$ ，則(1)繪出 P 點的圖形 (2)求此區域面積

Ans : 69

45、設 P 為 ΔABC 內部一點，若 $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 4\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ ，又直線 \overrightarrow{AP} 交 \overrightarrow{BC} 於 D ，已知

$\overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x, y) = ?$

Ans : $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$

46、設 $O(0, 0, 0), A(-1, 2, 3), B(3, 2, -4), C(5, 3, 2)$ ， $S = \{P \mid \overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + z \overrightarrow{OC}, x, y, z \geq 0$ 且 $1 \leq x + y + z \leq 4\}$ ，求 S 所成圖形的體積

Ans : $\frac{1491}{2}$

47、解方程式
$$\begin{cases} x + y + z = l + m + n \\ lx + my + nz = mn + ml + ln \\ (m - n)x + (n - l)y + (l - m)z = 0 \end{cases}$$

Ans : $x = \frac{m+n}{2}, y = \frac{l+n}{2}, z = \frac{m+l}{2}$

48、 $V = \{(x, y, z) | 0 \leq y + z \leq 2, 0 \leq z + x \leq 2, 0 \leq x + y \leq 2, x, y, z \in R\}$ ，設其體積為 p ，表面積為 q ，其上兩點的最大距離為 r ，求 p, q, r

Ans : $p = 4, r = \sqrt{11}$

49、 $x, y, z > 0$ ，令 $k = x + y + z = xy + yz + zx$ ，求 k 的最小值？

Ans : 3

50、一長方體的長、寬、高分別為 x, y, z ，已知 $x + y + z = 6$ ，全表面積為 18，求此長方體的最大體積為？

Ans : 4

51、設 $x, y, z > 0$ 且 $x + y + z = 9$ ，試求 $\log_3(xy + yz + zx)$ 的最大值？

Ans : 3

52、若 $a, b, c \geq 0$ ，且 $a + b + c = 8$ ，求 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 的最大最小值？

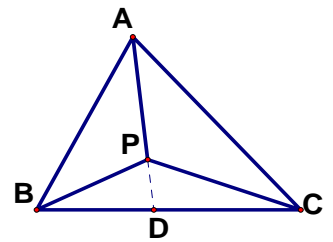
Ans : 最大值 $2\sqrt{6}$ 最小值 $2\sqrt{2}$

53、設 $x, y, z \in R$ 則(1)若 $|x| < 1, |y| < 1$ ，證明 $|x + y| < xy + 1$ (2)若 $|x| < 1, |y| < 1$ 且 $xyz + x + y + z = 0$ 試求 z 的範圍？

Ans : $-1 < z < 1$

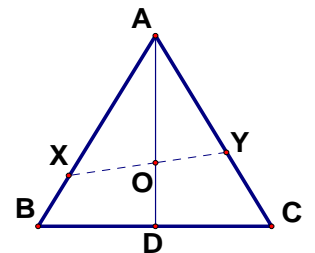
54、 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $\vec{AP} + 2\vec{BP} + k\vec{CP} = \vec{0}$ ，則(1) $k = 3$ 時， \vec{AP} 的延長線交 \overline{BC} 於 D ，則 $\overline{BD} : \overline{DC}$ (2)若 $\triangle ABP$ 的面積為 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{1}{3}$ ，則 $k = ?$

Ans : (1) 3:2 (2) $\frac{3}{2}$



55、正 $\triangle ABC$ 的邊長為 1，重心為 O ，過 O 的直線分別交 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 X, Y ，設 $\overline{OX} = x, \overline{OY} = y$ ，求 (1) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$ (2) 求 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ 的最大最小值

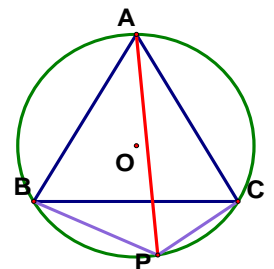
Ans : (1) 9 (2) 最大值 18，最小值 15



56、設正 $\triangle ABC$ 在外接圓上取一點 P ，使 P 與 A 落在 \overline{BC} 的異側，已知圓的半徑為 r ，則(1)證明

$\overline{AP} = \overline{BP} + \overline{CP}$ (2)證明 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 6r^2$ (3)求 $\overline{AP} \times \overline{BP} \times \overline{CP}$ 的最大值

Ans : 最大值為 $2r^3$



57、試證任兩個有理數之間至少有一個無理數

58、解方程式 $\frac{x}{8} + \frac{8}{x} = \frac{y}{27} + \frac{27}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Ans : $(x, y) = (27, 8), (\frac{64}{27}, 8), (27, \frac{729}{8}), (12, 18)$

59、解方程組
$$\begin{cases} x(x+y+z) = 30 - yz \\ y(x+y+z) = 35 - zx \\ z(x+y+z) = 42 - xy \end{cases}$$

Ans : $(x, y, z) = (2, 3, 4), (-2, -3, -4)$

60、設 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2 + 2n}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$

Ans : $\frac{1}{4}$

61、 $\triangle ABC$ 中，最大角 A 為最小角 C 的兩倍，且三邊長 a, b, c 成等差數列，求 $a:b:c$

Ans : 6:5:4

62、 $\triangle ABC$ 中， $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}, \cos \angle ACB = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， \overline{BC} 中點為 M ，由頂點 A 引 \overline{BC} 的垂線交 \overline{BC} 於 H

且 $\overline{MH} = 5$ ，求(1) \overline{AH} (2) \overline{BC} (3) \overline{AM} (4) $\sin \angle BAM$

Ans : (1) $\overline{AH} = 12$ (2) $\overline{BC} = 22$ (3) $\overline{AM} = 13$ (4) $\frac{33}{65}$

63、滿足 $|z-1| \leq |z| \leq 1$ 的複數 z 在複數平面上所成圖形面積為？

Ans : $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

64、若 $a = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ，求(1) $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4}$ (2) $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-a^3} + \frac{1}{2-a^4}$

Ans : (1)2 (2) $\frac{49}{31}$

65、平面上不共線三點 $A, B, C, \overline{AB} = 2, \overline{AC} = 3, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ ，求 $S = \{P | \overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}, x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 的面積？

Ans : $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

66、設 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq b \leq \frac{\pi}{3}$ ，在平面上， O 為原點，則 $\overrightarrow{OP} = (2\sin a + \cos b, \sin a + 3\cos b)$ 的一切終點所圍區域的面積為？

Ans : $\frac{5}{4}$

67、 $\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -2$ ，求 $\triangle ABC$ 的周長

Ans : $6\sqrt{3}$

68、平面上，若 $(\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 0$ ，則 ΔABC 何種三角形？

Ans：等腰三角形

69、若 O 為 ΔABC 的外心， $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ ，若直線 AO 交直線 BC 於 D ，求 $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$

Ans： $\frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{b^2(a^2 + c^2 - b^2)}$

70、空間中， $S = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, |x - y| \leq 1, 3 \leq z \leq 10, x, y, z \in R\}$ ，求 S 的體積？

Ans：28

71、將矩形紙板 $ABCD$ ，沿著對角線 \overline{AC} 摺起，使平面 ABC 垂直平面 ADC ，若 $\overline{AB} = 30, \overline{BC} = 40$

$\angle DAC = a$ ， D 在 yz 平面上， B 在 xy 平面上，求(1) D 坐標 (2) \overline{BD} 的長？

Ans : (1) $D(0, 32, 24)$ (2) $2\sqrt{337}$

72、求過兩點 $A(1, 2), B(3, 4)$ 且在 x 軸上之兩截距差的絕對值為 6 的圓方程式？

Ans : $(x+6)^2 + (y-11)^2 = 130, (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$

73、設 $S = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \geq 3\}, T = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ ，求 $S \cap T$ 的體積？

Ans : $36\pi - 36$

74、求不等式 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 \leq 0 \\ |z+1| \leq 3 \end{cases}$ 的圖形所成的體積？

Ans : 54π

75、求 $y = x^2, y = x^2 - 4x$ 的公切線方程式，若切點分別為 A, B 再求 \overline{AB} 與切線方程式？

Ans : (1) $A(-1, 1), B(1, -3)$ (2) $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ (3) $2x + y + 1 = 0$

76、若 P 在 $2x + y = 5$ 上，過 P 作 $4x^2 + y^2 = 4$ 的兩切線互相垂直，求 P 的坐標？

Ans : (2, 1)

77、(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\frac{x}{3}]}{x}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + [\frac{n}{3}]} - n)$

Ans : (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

78、 $f(x)$ 在 $x=3$ 可微，且 $f(3)=2, f'(3)=5$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^{10} f(x) - 3^{10} f(3)}{x-3}$ ？

Ans : 35×3^9

79、試證三次函數圖形必有一個對稱中心。

80、求 $y = \frac{4|x|}{x^2 + 4}$ 的極值與反曲點？

Ans : 極大值 1，極小值 0，反曲點 $(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $(-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

81、兩實數 x, y 滿足 $|x| + |y| = 1$ ，試求 $\frac{2-y}{x^2}$ 的最小值？

Ans : 2

82、 $x^2 + y^2 = 1, x^3 + y^3 = 1, x + y < 0$ ，求 $x + y = ?$

Ans : -2

83、設 $x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$ 的三根為 a, b, c ，且 $x^3 + px^2 + qx + r = (x - \frac{1}{a^2})(x - \frac{1}{b^2})(x - \frac{1}{c^2})$ ，求數對

$(p, q, r) = ?$

Ans : (-17, 10, -1)

84、若 $0 < a < b < 2\pi, \forall x \in R$ 恆使 $\sin x + \sin(a+x) + \sin(b+x) + k = -1$ 成立，求數對 (k, a, b)

Ans : $(-1, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

85、若 a, b 為複數，且 $|a| = |b| = 5$ ，又 $a = b - 2 + i$ ，求 $a = ?$

Ans : $\frac{(-2 + \sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3})i}{2}, \frac{(-2 - \sqrt{3}) + (1 - 2\sqrt{3})i}{2}$

86、在複數平面上， $z_1 = z, z_2 = z^3, z_3 = z^5, \angle z_2 z_1 z_3 = 90^\circ$ ，若 $|z| = \sqrt{2}$ ，求 z

Ans : $\pm\sqrt{2}(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}), \pm\sqrt{2}(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2})$

87、設 $A(1, 0, -1), B(0, 1, -2), C(2, 3, 0)$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圓面積？

Ans : $\frac{99\pi}{32}$

88、設 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{3}, L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+4}{-2}$ 二交於 $A(a, b, c)$ ，且 $L: \frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$

為 L_1, L_2 的角平分線，求(1) A 坐標 (2) (m, n)

Ans : (1)(1,3,-2) (2)(4,5) 或 $(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$

89、若 a 為實數， $x^3 + x^2 - x + a = 0$ 有一個虛根為 $\cos b + i \sin b$ ，求其三個根？

Ans : $-2, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

90、若 $-1 < x < 1$ ，且 $f(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \dots + \ln(1+x^{2^n}) + \dots$ 則(1)求 $f(x)$

(2)求 $\int f(x)dx$

Ans : (1) $-\ln(1-x)$ (2) $(1-x)\ln(1-x) + x + c$

91、設 $O(0,0,0), A(1,2,3), B(1,1,-2)$ 且 $S = \{P \mid \overrightarrow{OP} = r \overrightarrow{OA} + s \overrightarrow{OB}, |r| \leq 1, |s| \leq 1, |r+s| \leq 1\}$ ，求 S 的面積？

Ans : $3\sqrt{77}$

92、過 $P(-2,11)$ 的直線與拋物線 $x^2 = 8y$ 交於 A, B 兩點， O 為原點且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，求(1)直線 AB 的方程式 (2) ΔOAB 的面積？

Ans : (1) $3x + 2y = 16$ (2) 80

93、若 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, a, b, c \in Z, a > b > 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^6 - 1} = 2$ ，求 a, b, c

Ans : $a = 4, b = 1, c = -6$

94、對任意自然數 m, n ， $f(m, n)$ 滿足(1) $f(1, n) = n + 3$ (2) $f(m, n) = f(m-1, f(m-1, n+1)), m \geq 2$
求(1) $f(2, n)$ (2) $f(4, n)$ (3) $f(m, n)$

Ans : (1) $n + 7$ (2) $n + 31$ (3) $n + 2^{m+1} - 1$

95、 $n \in N$ 且除以 7 餘 1，除以 17 餘 3，求 n 除以 119 的餘數？

Ans : 71

96、設 $S : (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = 4$ 的球心滿足 $2a + b + 2c \geq 0, a - 2b + 2c \leq 0, 2a - 2b - c \geq 0$
且球面 S 與 $2x + y + 2z = 0, x - 2y + 2z = 0, 2x - 2y - z = 0$ 均相切，求球心的坐標？

Ans : $(\frac{30}{7}, \frac{18}{7}, \frac{-18}{7})$

97、設 P_1, P_2, P_3 為拋物線上的相異三點，過此三點分別作切線 l_1, l_2, l_3 ，並設其兩兩相交於

Q_1, Q_2, Q_3 ，試證明 $\Delta P_1 P_2 P_3 : \Delta Q_1 Q_2 Q_3 = 2 : 1$

98、若三個實數的倒數和等於此三實數和的倒數，證明至少有兩數的和為 0

99、已知拋物線 $y^2 = 4x$ 的焦點 F ，原點為 O ，若 \overline{PQ} 為一焦弦， $\overline{PQ} = m$ ，則求 ΔOPQ 面積？

Ans : \sqrt{m}

100、過原點 O 的直線與 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的交點為 P, Q 且 P 介於 O, Q 之間， $\overline{OP} = 2\overline{PQ}$ ，求此直線的斜率？

Ans : $\pm \frac{\sqrt{7}}{5}$

101、若 $a^2 + b^2 \neq 0, 2a + 3b + 4c = 0$ ，則 $ax + by + c = 0$ 恆過那一點？

$$\text{Ans : } \left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{4} \right)$$

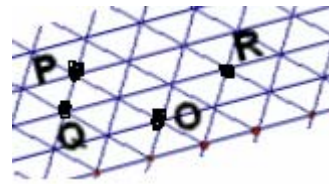
102、求體積為 k^3 的直圓柱體的最小全表面積？

$$\text{Ans : } 3k^2 \sqrt[3]{2\pi}$$

103、右圖為用正三角形網蓋在直角坐標平面上，若 $O(0,0)$

$P(a,b)$ ， $Q(c,d)$ ，求 R 的直角坐標？

$$\text{Ans : } \left(\frac{3a}{2} - 2c, \frac{3b}{2} - 2d \right)$$



104、 $y = \frac{1}{2}x$ 上一點 P 在第一象限內， $\overline{OP} = 25$ ， O 為原點，又 P 對 $y = -\frac{1}{2}x$ 的對稱點為 Q ， Q 對

$y = \frac{1}{2}x$ 的對稱點為 R ，則(1)求 $\cos \angle PQR$ (2) ΔPQR

$$\text{Ans : } (1) \frac{3}{5} \quad (2) 768$$

105、 $y = ax^2 + bx + 1$ 的正焦弦長為 $\frac{1}{3}$ ，開口朝下，焦點坐標為 $(k, \frac{9}{4})$ 且 $k > 0$ ，求 $a, b = ?$

$$\text{Ans : } a = -3, b = 4$$

106、設 $f(x) = \frac{x(1+x)(2+x)\dots(n+x)}{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}$ ，求 $f'(0)$

$$\text{Ans : } 1$$

107、若 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ，求 $\frac{\tan x - \sin^2 x}{\tan x + \sin^2 x}$ 的最大最小值？

$$\text{Ans : } \text{最大 } \frac{25 - 8\sqrt{3}}{13}, \text{ 最小 } \frac{1}{3}$$

108、若 x, y 為正整數且 $x + y = 7$ ，求 $(1 - \frac{x}{10})(1 - \frac{y}{10})$ 的極大值？

$$\text{Ans : } \frac{21}{50}$$

109、設 $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$ 正交，求證 $d_1d_2 + e_1e_2 = 2(f_1 + f_2)$

110、坐標平面上，通過 $A(-1, 4), B(3, 2)$ 且被 x 軸所截出的弦長為 $\sqrt{65}$ 的圓方程式為何？

$$\text{Ans : } x^2 + y^2 - 29x - 60y + 194 = 0, x^2 + y^2 - x - 16 = 0$$